1. V jistém regionu spolu soupeří dvě firmy vyrábějící nápoje: první firma vyrábí nápoj A, druhá firma nápoj B. Výzkumem bylo zjištěno, že zákazník, který si koupí nápoj A, si tento nápoj koupí i příště s pravděpodobností 0,9. Jestliže si zákazník koupí poprvé nápoj B, potom pravděpodobnost, že si jej koupí i příště, je 0,7. Dále bylo zjištěno, že 80 % zákazníků si napoprvé vybírá nápoj B. Obě firmy zajímá:

a) Kolik zákazníků si koupí jejich nápoj při druhém, třetím a dalších nákupech?

b) Jakou část trhu mohou ovládnout?

Řešení:

a) Dané pravděpodobnosti: 0,9 a 0,1 (respektive 0,7 a 0,3) zapíšeme do matice $\boldsymbol{P}$, kterou nazýváme *maticí přechodu*, a která má součet prvků v každém sloupci rovný jedné:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Počáteční stav je popsán sloupcovým *stavovým vektorem* $\boldsymbol{S}_0 = (0,2;0,8)^T$. Následující stav $\boldsymbol{S}_1$ získáme ze stavu $\boldsymbol{S}_0$ tak, že $\boldsymbol{S}_0$ vynásobíme zleva maticí $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{pmatrix}$$

Stav $\boldsymbol{S}_2$ získáme opět násobením maticí $\boldsymbol{P}$ zleva:

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,552 \\ 0,448 \end{pmatrix},$$

analogicky $\boldsymbol{S}_3 = \begin{pmatrix} 0,6312 \\ 0,3688 \end{pmatrix}$, $\mathrm{S}_4 = \begin{pmatrix} 0,6787 \\ 0,3213 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S}_5 = \begin{pmatrix} 0,7072 \\ 0,2928 \end{pmatrix}$, atd.

Obecně platí, že $\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{P}^n\cdot\boldsymbol{S}_0$, nemusíme tedy k získání například stavu $\boldsymbol{S}_{10}$ počítat všechny stavy předchozí, stačí spočítat „jen“ $\boldsymbol{P}^{10}$. Stavy $\boldsymbol{S}_i$ tvoří takzvané *Markovovy řetězce*.

b) Pokud je matice $\boldsymbol{P}$ čtvercová a její prvky p_{ij} splňují tyto podmínky:

$\sum_i p_{ij} = 1 \wedge p_{ij} > 0$ pro každé n,

konverguje posloupnost stavů $\boldsymbol{S}_i$ k jistému *stacionárnímu stavu* $\boldsymbol{S}$. Pro tento ustálený stav zřejmě platí $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}$, a pokud označíme $\boldsymbol{S} = (a,b)^T$, pak souřadnice $\boldsymbol{S}$ získáme řešením soustavy:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$, a po roznásobení:

$$a = 0,9a + 0,3b$$

$$b = 0,1a + 0,7b\,.$$

Z první rovnice plyne $a = 3b$, druhá rovnice není nezávislá, proto je druhou podmínkou rovnost $a + b = 1$ (součet pravděpodobností úplného systému jevů je roven 1). Řešením je vektor $\boldsymbol{S} = (a,b) = (0,75;0,25)$.

Ať tedy na začátku nakupují zákazníci jakýkoli nápoj, po určité době se situace na trhu ustálí a 75 % zákazníků bude kupovat nápoj A a pouze 25 % zákazníků nápoj B.

Otázka pro samostatné řešení:

Novým dotazníkovým šetřením bylo zjištěno, že jestliže si zákazník koupí poprvé nápoj B, potom pravděpodobnost, že si jej koupí i příště, je pouze 0,6. Jak se změní odpovědi na otázky a) a b)?