MATEMATIKA

PŘÍKLADY K PŘÍJÍMACÍM ZKOUŠKÁM – BAKALÁŘSKÉ STUDIUM

MGR. RADMILA STOKLASOVÁ, PH.D.

Obsah

1 MNOŽINY

1.1 ČÍSELNÉ MNOŽINY

Množina přirozených čísel $N = \{1,2,3,...,n,...\}$, $N_0 = \{0,1,2,...,n,...\}$.
Množina celých čísel $Z = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.
Množina racionálních čísel Q je rozšířením množiny celých čísel o všechna necelá racionální čísla tvaru $\frac{p_1}{p_2}$, kde p_1, p_2 $(p_2 \neq 0)$ jsou nesoudělná celá čísla.

Množina reálných čísel $R = (-\infty,\infty)$. Někdy namísto ∞ používáme $+\infty$ a tento symbol se nazývá „plus nekonečno“.
Množina iracionálních čísel $R - Q$. Jsou to čísla, která jsou reálná, ale nejsou racionální. Například Ludolfovo číslo π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Termíny racionální a iracionální čísla vznikly z latinského slova *ratio*, tj. rozum. Proto racionální čísla jsou čísla „rozumná“ a iracionální čísla jsou čísla „nerozumná“. Nerozumného však na nich nic není!

Kvůli zjednodušení se v tomto textu využívá také běžná součtová a součinová symbolika nebo též sumační a multiplikační symbolika.

Pro zápis součtu více sčítanců nebo součinu více činitelů se používá symbolika, která podstatně zjednodušuje vyjadřování.
Nechť $n \in N$, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in R$. Potom značíme symbolem

a. $\sum_{i=1}^{n} a_i$ součet $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$,

b. $\prod_{i=1}^{n} a_i$ součin $a_1 . a_2 . a_3 ... a_n$.

Index i se nazývá součtový (resp. součinový) index, číslo 1 se nazývá dolní mez a číslo n horní mez tohoto součtu (resp. součinu).

Příklad 1.
Zapište pomocí sumační symboliky aritmetický průměr čísel $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Řešení.
Aritmetický průměr $\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Příklad 2.

Vypočtěte: **a.** $\sum_{i=-1}^{3} 2^i$, **b.** $\prod_{i=3}^{n=5} (2i+4)$.

Řešení.

a. $\sum_{i=-1}^{3} 2^i = 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = \frac{31}{2}$,

b. $\prod_{i=3}^{n=5} (2i+4) = 10.12.14 = 1680.$

1.2 OPERACE S MNOŽINAMI

Základním vztahem mezi prvkem a množinou je vztah „býti prvkem množiny“ značíme jej symbolem $a \in A$. Symbolem $a \notin A$ označujeme skutečnost, že prvek x nepatří do množiny A.

Množinou rozumíme souhrn libovolných objektů, které jsou vzájemně rozlišitelné. Objekty tvořící množinu se nazývají prvky (elementy) množiny. Základní vlastností množiny je jednoznačné určení množiny jejími prvky. O každém objektu (abstraktním nebo reálném) můžeme jednoznačně rozhodnout, zda do dané množiny patří nebo nepatří. Množiny označujeme velkými písmeny, prvky malými písmeny. Pro zadání množin používáme složené závorky.

Zadání množin

a. výčtem (vyjmenováním) prvků množiny, např. $\{a, b, c\}$,

b. uvedením charakteristické vlastnosti, společné všem prvkům množiny. Žádný jiný prvek (nepatřící do množiny) tuto vlastnost nemá, např. $\{x \in R; -3 \le x \le 10\}$.

Podle počtu prvků dělíme množiny na konečné**,** nekonečné a množinu prázdnou. Prázdná množina neobsahuje žádný prvek. V teorii množin má obdobný význam jako nula v teorii čísel.

Základní vztahy mezi množinami jsou vztahy:

a. rovnosti: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$,

b. inkluze (být podmnožinou): $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Operace s množinami:

a. sjednocení množin A, B: $A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$,

b. průnik množin A, B: $A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$,

c. rozdíl množin A, B: $A - B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$,

d. doplněk množiny A v základní množině Z: $\overline{A} = \{x;\ x \in Z \wedge x \notin A\}$,

e. kartézský součin množin A, B: $A \times B = \{(x, y);\ x \in A \wedge y \in B\}$.

Příklad 3.

Určete pomocí intervalů prvky množin $A, B, C, D,\ A \cap C,\ \overline{B},\ C - B,\ \overline{D},\ A \cup B$,

kde $A = \left\{x \in R; |x-2| \le 4 \ \wedge \ \left|6 + \frac{x}{2}\right| > 7\right\}$, $\quad B = \left\{x \in R; \left|\frac{x}{x+2}\right| \le 1\right\}$,

$C = \{x \in R; x^2 + 2x - 8 \le 0\}$, $\quad D = \{x \in R; x^2 + x + 1 > 0\}$.

Řešení.

Množina A: $|x-2| \le 4 \quad \wedge \quad \left|6+\frac{x}{2}\right| > 7$

$$\frac{1}{2}|12+x| > 7$$

$$|12+x| > 14$$

$x \in \langle -2, 6\rangle \qquad x \in (-\infty,-26)\cup(2,\infty)$

$$A = \langle -2,6\rangle \cap [(-\infty,-26)\cup(2,\infty)] = (2,6\rangle .$$

Množina B: $\left|\frac{x}{x+2}\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le \frac{x}{x+2} \le 1$

$$-1 \le \frac{x}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{x}{x+2} \le 1$$

$$0 \le \frac{2x+2}{x+2} \quad \wedge \quad \frac{-2}{x+2} \le 0$$

$$B = [(-\infty,-2)\cup\langle -1,\infty)]\cap(-2,\infty) = \langle -1,\infty).$$

Množina C: $x^2+2x-8 \le 0$

$$(x+4)(x-2) \le 0$$

Řešením kvadratické nerovnice je $x \in \langle -4,2\rangle$, tedy $C = \langle -4,2\rangle$.

Množina D: $x^2+x+1>0$

Protože diskriminant je záporný $(D=-3)$ jsou řešením nerovnice v oboru reálných čísel buď všechna reálná čísla, nebo množina prázdná. V našem případě je $D = R$.

$A \cap C = (2,6\rangle \cap \langle -4,2\rangle = \emptyset$,

$\overline{B} = R - B = (-\infty,\infty) - \langle -1,\infty) = (-\infty,-1)$,

$C - B = \langle -4,2\rangle - \langle -1,\infty) = \langle -4,-1)$,

$A \cup B = (2,6\rangle \cup \langle -1,\infty) = \langle -1,\infty)$.

Příklad 4.

Graficky znázorněme množiny $A, B, C, D, E, F, G, \overline{A}$, kde

$A = \{(x,y)\in R^2;\ x^2+y^2<9\}$,

$B = \{(x,y)\in R^2;\ x^2 \ge y\}$,

$C = \{(x,y)\in R^2;\ x<0 \quad \wedge \quad y>-1\}$,

$D = \{(x,y)\in R^2;\ |x| \le 2 \quad \wedge \quad |y|>1\}$,

$E = \{(x,y)\in R^2;\ x+2y \le 2\}$,

$F = \{(x,y)\in R^2;\ x = y^2\}$,

$G = \{(x,y)\in R^2;\ x>y \quad \wedge \quad y \ge 0\}$.

Řešení.

Množina A je kruh se středem $\mathrm{S} = [0,0]$ a poloměrem $r = 3$, bez své hranice.
Množina B je vnější oblast paraboly, která má vrchol v bodě $\mathrm{V} = [0,0]$ a větve paraboly jsou směrem nahoru.
Množina C je průnikem poloroviny $x < 0$ (hranicí je osa y, která do množiny C nepatří) a poloroviny $y > -1$ (hranicí je přímka $y = -1$, která do množiny C nepatří).
Množina D je průnikem dvou oblastí: 1) vnější oblastí pásu, který je omezen přímkami $y = 1,\ \ y = -1,$ které do množiny D nepatří, 2) vnitřní oblastí pásu, který je omezen přímkami $x = 2,\ \ x = -2,$ které do množiny D patří.
Množina E je plocha „pod přímkou“, která prochází body $[0,1],\ \ [2,0]$. Přímka do množiny E patří.
Množina F je parabola, která má vrchol v bodě $\mathrm{V} = [0,0]$ a větve paraboly jsou směrem doprava.
Množina G je průnikem dvou polorovin: 1) dolní polorovina, která je omezena přímkou $y = x$, přičemž přímka do množiny G nepatří, 2) horní polorovina, která je omezena přímkou $y = 0,$ (osa x), která do množiny G patří.
Množina $\overline{A}$ je doplňkem množiny A, tj. vnější oblast kružnice se středem $\mathrm{S} = [0,0]$ a poloměrem $r = 3$, včetně hranice kružnice.

2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Algebraický výraz je zápis, který je složen z čísel a písmen vyjadřujících jednotlivé proměnné (neznámé). Čísla a písmena jsou spojována znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování či odmocňování. Algebraický výraz může dále obsahovat závorky, které stanovují pořadí jednotlivých početních operací.

Příkladem výrazu je např. $(a+1)^2$, $\frac{x+5}{2}$, $\sqrt{x+y}$ +7, atd.

S úpravami algebraických výrazů souvisí nutnost stanovení definičního oboru proměnných, tj. vymezení, kdy má daný výraz smysl. Nejčastěji se budeme setkávat s určením podmínek řešitelnosti pro lomené výrazy, kdy jmenovatel zlomku nesmí nabývat nulové hodnoty. Úprava algebraického výrazu představuje nahrazení výrazu výrazem jiným, který se mu rovná v definičních oborech proměnných. Zjednodušení algebraického výrazu je situace, kdy nový výraz obsahuje menší počet členů, proměnných, atd.

2.1 OPERACE S JEDNOČLENY A MNOHOČLENY

Pod pojmem jednočlen chápeme výraz, který obsahuje pouze operace násobení a umocňování. Jedná se tedy o součin určitého čísla (koeficientu) a mocnin jedné popř. více proměnných s přirozenými mocniteli.
Mnohočlen neboli polynom je potom součet konečného počtu jednočlenů (členů mnohočlenu). Stupeň mnohočlenu je dán nejvyšším exponentem proměnné. Mnohočlen, který obsahuje pouze exponent a^0, je mnohočlen nultého stupně. Mnohočleny jsou si rovny, jestliže mají všechny členy shodné. Hodnotu mnohočlenu získáme tak, že za proměnnou dosadíme konkrétní reálné číslo.

Pro všechna čísla *a*, *b*, *c* z množiny všech reálných čísel *R* platí:

$a+0=0+a=a$ $a\cdot 1=1\cdot a=a$	neutrálnost
$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$	komutativnost
$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	asociativnost
$a\cdot(b+c)=ab+ac$	distributivnost

Při součtu či rozdílu mnohočlenů slučujeme odpovídající si členy, při násobení násobíme každý člen s každým.

Příklad 1.

Sečtěte jednočleny:

$$-1\frac{2}{3}ab^3 + 2a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b$$

Řešení.

$$-1\frac{2}{3}ab^3 + 2a^3b - 4\frac{1}{2}a^2b - ab^3 - \frac{1}{2}a^2b - a^3b =$$
$$= \left(-1\frac{2}{3}ab^3 - ab^3\right) + (2a^3b - a^3b) + \left(-4\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}a^2b\right) == -2\frac{2}{3}ab^3 + a^3b - 5a^2b$$

Příklad 2.

Sečtěte mnohočleny:

$$\{[(2a + b) - (2a - b)] + (4a + 1) - (2a - 3)\} - [5 - (3a + 2)]$$

Řešení.

$$\{[(2a + b) - (2a - b)] + (4a + 1) - (2a - 3)\} - [5 - (3a + 2)]=$$

$$= 2a + b - 2a + b + 4a + 1 - 2a + 3 - 5 + 3a + 2 = 5a + 2b + 1$$

Příklad 3.

Vynásobte a upravte:

$$2a(10a - 3b) - 5\{b(5a + 3b) - [3b^2 - a(4a - 6b)]\}$$

Řešení.

$$2a(10a - 3b) - 5\{b(5a + 3b) - [3b^2 - a(4a - 6b)]\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{5ab + 3b^2 - [3b^2 - 4a^2 + 6ab]\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{5ab + 3b^2 - 3b^2 + 4a^2 - 6ab\} =$$

$$= 20a^2 - 6ab - 5\{4a^2 - ab\} = 20a^2 - 6ab - 20a^2 + 5ab = -ab$$

Dělení mnohočlenu probíhá následujícím způsobem. Člen nejvyššího stupně dělence se dělí členem nejvyššího stupně dělitele. Tímto postupem získáme první člen neúplného podílu, kterým zpětně vynásobíme dělitele. Vzniklý výsledek odečteme od dělence, jehož stupeň se provedenou úpravou sníží. Dále postupujeme stejným způsobem.

Příklad 4.

Vydělte:

a) $(x^2 + 5x + 4):(x + 1)$

b) $(10x^3 + 7x^2 - x - 1):(2x + 1)$

Řešení.

a)

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 5x + 4):(x + 1) = x + 4 \\
\underline{-(x^2 + x)} \\
\quad 4x + 4 \\
\quad \underline{-(4x + 4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

podmínka: $x \neq -1$

b)

$$
\begin{array}{l}
(10x^3 + 7x^2 - x - 1):(2x + 1) = 5x^2 + x - 1 \\
-(10x^3 + 5x^{2)} \\
\qquad 2x^2 - x - 1 \\
\quad \underline{-(2x^2 + x)} \\
\qquad\quad -2x - 1 \\
\qquad \underline{-(-2x - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

podmínka: $x \neq -\frac{1}{2}$

Rozklad mnohočlenu na součin je možný pomocí vytýkání společného činitele před závorku, využití rozkladu dle vzorců pro mnohočleny nebo pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu. Cílem je úprava původního mnohočlenu na součin několika jednodušších mnohočlenů.

Při úpravách algebraických výrazů se budete setkávat s následujícími vzorci:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Výrazy $a^2 + b^2,\ a^2 + ab + b^2,\ a^2 - ab + b^2$ jsou výrazy v oboru reálných čísel nerozložitelné.

Příklad 5.

Upravte:

a) $(x-2)^2$
b) $(x+2)^3$
c) x^3+8
d) x^3-27
e) $25x^2-64y^2$

Řešení.

a) $(x-2)^2 = x^2-4x+4$
b) $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$
c) $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$
d) $x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$
e) $25x^2-64y^2 = (5x-8y)(5x+8y)$

Rozklad kvadratického trojčlenu

Pod pojmem **kvadratický trojčlen** rozumíme výraz ax^2+bx+c. Setkávat se budete rovněž s pojmem **normovaný kvadratický trojčlen** ve tvaru x^2+px+q.

Kvadratický trojčlen lze rozložit na součin lineárních dvojčlenů v množině všech reálných čísel R za podmínky, že diskriminant neboli výraz $b^2-4ac>0$ resp. $p^2-4q>0$. Kořeny kvadratického trojčlenu se označují x_1 a x_2 a platí, že:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$
$x_1+x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

Příklad 6.

Upravte na součin:

a) $x^2-8x+15$
b) $x^2-3x-28$
c) x^2-4x+3
d) x^2+4x+3
e) $x^2-4x-12$
f) $x^2-8x+12$
g) $x^2+4x-12$

Řešení.

a) $x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$
$x_1+x_2 = 8$ $\qquad$ $x_1 = 3$
$x_1 \cdot x_2 = 15$ $\qquad$ $x_2 = 5$

b) $x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$
$x_1 + x_2 = 3$ $\quad x_1 = 7$
$x_1 \cdot x_2 = -28$ $\quad x_2 = -4$

c) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$
d) $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$
e) $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$
f) $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$
g) $x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$

2.2 LOMENÉ VÝRAZY

Lomené výrazy jsou výrazy ve tvaru podílu dvou výrazů, tj. podíl $\frac{a}{b}$, kde $b \neq 0$.
Výraz *a* se nazývá **čitatel** zlomku a výraz *b* **jmenovatel** zlomku. U lomených výrazů je nutné stanovit definiční obor proměnné. Podmínkou je, že jmenovatel lomeného výrazu nesmí nabývat nulové hodnoty.

Početní operace s lomenými výrazy
Pro všechna čísla *a*,*b*,*c*,*d* z množiny všech reálných čísel *R*, kde $b \neq 0, d \neq 0$ platí:

Sčítání a odčítání lomených výrazů: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

Násobení lomených výrazů: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dělení a úprava složeného zlomku: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

Často bude výhodné využít před operacemi sčítání, odčítání, násobení a dělení tzv. krácení zlomku v podobě $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$, kde $k \neq 0$.

Příklad 7.

Upravte algebraické výrazy a stanovte podmínky řešitelnosti:

a) $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$

b) $\frac{2x-1}{2x} - \frac{2x}{2x-1} - \frac{1}{2x - 4x^2}$

c) $\frac{2a+b}{a^2+ab} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}$

Řešení.

a)

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

podmínka: $x \neq \pm 1$

b)

$$\frac{2x-1}{2x}-\frac{2x}{2x-1}-\frac{1}{2x-4x^2}=\frac{2x-1}{2x}-\frac{2x}{2x-1}-\frac{1}{2x\cdot(1-2x)}=$$

$$=\frac{(2x-1)(2x-1)-2x\cdot 2x+1}{2x\cdot(2x-1)}=\frac{4x^2-4x+1-4x^2+1}{2x\cdot(2x-1)}=\frac{-4x+2}{2x\cdot(2x-1)}=$$

$$=\frac{-2\cdot(2x-1)}{2x\cdot(2x-1)}=-\frac{2}{2x}=-\frac{1}{x}$$

podmínky: $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$

c)

$$\frac{2a+b}{a^2+ab}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b}{a(a+b)}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a+b-a-b+a}{a(a+b)}=\frac{2a}{a(a+b)}=\frac{2}{a+b}$$

podmínky: $a \neq 0, a \neq -b$

Složený zlomek

Složený zlomek představuje podíl dvou jednoduchých zlomků. Složený zlomek dělíme, jestliže násobíme jeho převrácenou hodnotu. V některých případech bude nutné nejdříve složený zlomek upravit, tj. rozšířit a stanovit nejmenší společný jmenovatel v čitateli a jmenovateli složeného zlomku (tj. ve jmenovatelích jednoduchých zlomků). Stejně jako u jednoduchého zlomku nesmíme ovšem zapomenout na vymezení podmínek řešitelnosti.

Příklad 8.

Upravte složené zlomky a stanovte podmínky řešitelnosti.

a) $\dfrac{x+\frac{x+1}{2}}{1+\frac{6x-2}{4}}$ b) $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$

Řešení.

a)

$$\frac{x+\frac{x+1}{2}}{1+\frac{6x-2}{4}}=\frac{\frac{2x+x+1}{2}}{\frac{4+6x-2}{4}}=\frac{\frac{3x+1}{2}}{\frac{6x+2}{4}}=\frac{4(3x+1)}{2(6x+2)}=\frac{4(4x+1)}{4(3x+1)}=1$$

podmínka: $x \neq -\frac{1}{3}$

b)

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}=\frac{xy(x^2+y^2)}{xy(x^2-y^{2)}}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

podmínky: $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$

2.3 MOCNINY A ODMOCNINY

Mocniny

Výraz a^n znamená, že se jedná o opakování násobení téhož činitele *a* *n*-krát. Výraz *a* nazýváme **základ mocniny** (mocněnec) a *n* **mocnitel** (exponent). Pro všechna přípustná reálná čísla *a*,*b*,*m*,*n* platí následující vztahy:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}; a \neq 0$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^m = a^m \cdot b^m$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; b \neq 0$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a^0 = 1$

Příklad 9.

Upravte výraz a stanovte podmínky řešitelnosti:

$$\left[(a^4b)^{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[(a^{-3}b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Řešení.

$$\left[(a^4b)^{\frac{1}{4}}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[(a^{-3}b^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = (a^4b)^{-\frac{1}{8}} \cdot (a^{-3}b^3)^{\frac{1}{6}} = \left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{8}}\right) \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) = a^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} =$$

$$= a^{-1} \cdot b^{\frac{3}{8}} = \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^1} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{a}$$

podmínky: $a \succ 0, b \succ 0$

Odmocniny
Pro každé číslo n z množiny všech přirozených čísel N nazýváme n-tou odmocninou z nezáporného čísla a takové nezáporné číslo b, pro něž platí $b^n = a$.
Z definice vyplývá, že $b = \sqrt[n]{a}$. Číslo n označujeme výrazem **odmocnitel** (exponent odmocniny) a číslo a jako **odmocněnec** (základ odmocniny).

Pro $a \geq 0, b \geq 0; m, n \in N\ platí$:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

Příklad 10.

Upravte výrazy:

a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ b) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$

Řešení.
a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{5}{3}$$

Odmocniny můžeme převést rovněž na mocniny. K převodu na mocniny využijeme vztahu $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Jinou metodou řešení je převod všech odmocnin na jednu společnou odmocninu.

Příklad 11.

Upravte výrazy a stanovte podmínky řešitelnosti:
a) $\sqrt[7]{a^{20}}$

b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$

c) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt[18]{a^{13}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}}$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

Řešení.

a) $\sqrt[7]{a^{20}} = \sqrt[7]{a^{14} \cdot a^6} = \sqrt[7]{(a^2)^7} \cdot \sqrt[7]{a^6} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a^6}$

podmínka: $a \geq 0$

b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \cdot \sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^8 \cdot y^6 \cdot x^3 y^6 \cdot x^{10}} = \sqrt[12]{x^{21} y^{12}} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^9 \cdot y^{12}} =$

$= xy\sqrt[12]{x^9} = xy\sqrt[4]{x^3}$

podmínka: $x \geq 0, y \geq 0$

c) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7} \cdot \sqrt[18]{a^{13}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}} = \sqrt[18]{a^{15} \cdot a^{14} \cdot a^{13} \cdot a^{-24}} = \sqrt[18]{a^{18}} = a$

podmínka: $a > 0$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{4+2+1}{8}} = a^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{a^7}$

podmínka: $a \geq 0$

Usměrňování lomených výrazů

Usměrňování lomených výrazů znamená, že se snažíme ze jmenovatele zlomku odstranit výraz obsahující odmocninu. Za tímto účelem je nutné zlomek rozšířit na početní výraz, který je mu roven, ale již neobsahuje odmocninu. V případě, že se jedná o samotnou odmocninu, je nutné rozšířit výraz toutéž odmocninou. V případě součtu (rozdílu) obsahujícího odmocninu popř. odmocniny rozšiřujeme součtem (rozdílem) téhož výrazu dle vztahu
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Příklad 12.

Usměrněte lomené výrazy:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}$

Řešení.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - 2} = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \dfrac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} = \dfrac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \dfrac{\sqrt{5} + 2}{1} = \sqrt{5} + 2$

2.4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

Absolutní hodnota reálného čísla a se označuje výrazem $|a|$ a znamená, že $|a| = a$ pro $a \geq 0$ a $|a| = -a$ pro $a < 0$.
Absolutní hodnota nechává nezáporná čísla beze změny a záporná čísla násobí (-1) . Platí, že $|a| \geq 0$. Hodnota čísla a je tedy při dosazování kladných i záporných čísel stále nezáporné číslo. Absolutní hodnota nuly se rovná nule.
Absolutní hodnota je z grafického hlediska vzdálenost čísla a od 0, tj. od počátku.

Příklad 13.

Vypočtěte absolutní hodnotu reálných čísel:
a) $|3|$ b) $|-3|$ c) $|-3| + |5| - |-2| + |-1|$

Řešení.
a) $|3| = 3$
b) $|-3| = 3$
c) $|-3| + |5| - |-2| + |-1| = 3 + 5 - 2 + 1 = 7$

3 ROVNICE A NEROVNICE

Pod pojmem rovnice rozumíme zápis rovnosti dvou výrazů. Znamená to tedy, že se levá strana rovnice rovná pravé straně rovnice, tj. $L(x) = P(x)$, kde x je proměnná.

Rovnice řešíme na oboru proměnné, což je některý z číselných oborů (R, N, Z, atd.). Neznámou (proměnnou) označujeme písmeny, nejčastěji písmenem x. Jestliže budeme řešit rovnici v oboru (množině) reálných čísel R, tak platí zápis $x \in R$.

Kořen rovnice (řešení rovnice) je hodnota proměnné, tj. číslo, pro které platí, že po dosazení do rovnice vytvoří rovnost. Levá strana rovnice se bude rovnat pravé straně rovnice. Množinu všech kořenů (řešení) rovnice nazýváme K a je vždy podmnožinou oboru proměnné. Při řešení rovnic se používají ekvivalentní úpravy. Jedná se o úpravy rovnic, při kterých se množina kořenů K nemění.

Ekvivalentní úpravy:
- vzájemná výměna stran rovnice,
- nahrazení vybrané strany rovnice výrazem, který je jí v celém definičním oboru řešení rovnice roven,
- přičtení téhož výrazu nebo reálného čísla k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice týmž reálným číslem různým od nuly popř. týmž výrazem, který je definován v celém oboru řešení rovnice.

Ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení rovnice. Při řešení iracionálních rovnic, kdy se proměnná x nachází pod odmocninou, je nezbytné použít neekvivalentní úpravy a obě strany rovnice umocnit. Umocňování a odmocňování neřadíme mezi ekvivalentní úpravy. Zkouška je nezbytnou součástí řešení, jestliže v průběhu řešení rovnice byly použity neekvivalentní úpravy. V případě, že při řešení byly použity pouze ekvivalentní úpravy, zkouška není nutná. Zkoušku je ovšem možné provést, a to z důvodu kontroly numerické správnosti výsledku.

Existuje několik druhů rovnic – lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické či goniometrické rovnice. Pro účely našeho studia se budeme zabývat rovnicemi lineárními a kvadratickými.

3.1 LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnicí o jedné neznámé x nazýváme každou rovnici $ax + b = 0$, pro $a, b \in R$, $a \neq 0$.
V případě, že se neznámá nachází ve jmenovateli, je nezbytné stanovit podmínky řešitelnosti rovnice. Řešením rovnice v množině R může být jedno číslo, nekonečně mnoho řešení popř. rovnice nemusí mít řešení žádné:

$a \neq 0$	jediným řešením (kořenem) je $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$, $b = 0$	rovnice má nekonečně mnoho řešení, tj. množina R
$a = 0$, $b \neq 0$	rovnice nemá řešení

Příklad 1.
V množině *R* řešte rovnici:

$$\frac{17-x}{3}+\frac{2x}{10}=\frac{7x-5}{5}-\frac{6x}{30}$$

Řešení.

Obě strany rovnice vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem (30), abychom odstranili zlomky. Rovnice má po ekvivalentní úpravě následující tvar:

$$\frac{17-x}{3}+\frac{2x}{10}=\frac{7x-5}{5}-\frac{6x}{30} \qquad /.30$$

$10\,(17-x)\;+\;3\cdot 2x\;=\;6\,(7x-5)-6x$
$170-10x\;+\;6x\;=\;42x-30-6x$
$170-4x\;=\;36x-30$
$40x\;=\;200$
$x\;=\;5$

Rovnice má jeden kořen K = {5}.

Příklad 2.

V množině *R* řešte rovnici:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-1=\frac{6}{x^2+x-2}$$

Řešení.

Hodnota ve jmenovateli nesmí být rovna 0, proto je nutno vymezit podmínky
$x\neq -2; x\neq 1$. Výraz upravíme a obě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem $(x-1)(x+2)$.

$(x+1)(x+2)+2(x-1)-(x-1)(x+2)\;=\;6$
$x^2+3x+2+2x-2-(x^2+x-2)\;=\;6$
$4x\;=\;4$
$x\;=\;1$

Vzhledem ke skutečnosti, že dle podmínek se $x\neq 1$, nemá daná rovnice řešení, tj. kořenem rovnice je prázdná množina $K=\emptyset$

3.2 Soustavy lineárních rovnic

Soustava rovnic je situace, kdy hledáme více neznámých (proměnných), které vyhovují všem rovnicím současně.

Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y má následující tvar:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice $[x, y]$. Řešením soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých je uspořádaná trojice $[x, y, z]$.

Metody řešení soustav lineárních rovnic:
1. metoda dosazovací – z vybrané rovnice se vyjádří jedna neznámá pomocí druhé neznámé a dosadí se do rovnice druhé. Po následném vyřešení jedné z proměnných dojde ke zpětnému dosazení vypočtené proměnné do první rovnice a určení chybějící neznámé.

2. metoda sčítací – jedna popř. obě rovnice soustavy se vynásobí vhodným číslem tak, aby se po sečtení rovnic jedna z proměnných vyloučila. Po vypočtení jedné neznámé lze tuto metodu již zkombinovat s metodou dosazovací, tj. vypočtenou neznámou dosadit do libovolné rovnice a dopočíst chybějící proměnnou.

3. metoda srovnávací – z každé rovnice se vyjádří jedna proměnná a získané výrazy se položí do rovnosti. Vypočtenou neznámou pak dosadíme do libovolné rovnice a dopočítáme chybějící proměnnou.

4. metoda maticová – do maticového schématu doplníme číselné koeficienty jednotlivých proměnných a postupujeme pomocí úprav na trojúhelníkový tvar.

5. metoda grafická – na základě grafického znázornění soustavy rovnic hledáme řešení (např. v případě soustavy lineárních rovnic se jedná o průsečík přímek).

Příklad 3.

Řešte v R^2 soustavu rovnic: $2x + 3y = 13$
$3x - y = 3$

Řešení.

$2x + 3y = 13$ řešíme metodou dosazovací
$3x - y = 3$ $\Rightarrow y = 3x - 3$

$2x + 3(3x - 3) = 13$
$2x + 9x - 9 = 13$
$11x = 22$
$x = 2$

$y = 3x - 3$
$y = 3 \cdot 2 - 3$
$y = 6 - 3$
$y = 3$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice [2; 3].

Příklad 4.

Řešte v R^2 soustavu rovnic: $2x + 3y = 14$
$5x - 2y = -3$

Řešení.

$2x + 3y = 14$
$\underline{5x - 2y = -3}$

Řešíme metodou sčítací.

$2x + 3y = 14 \,/\,.(-5)$
$\underline{5x - 2y = -3} \,/\,.2$
$-10x - 15y = -70$
$\underline{10x - 4y = -6}$
$-19y = -76$
$y = 4$

$2x + 3y = 14 \,/\,.2$
$\underline{5x - 2y = -3} \,/\,.3$
$4x + 6y = 28$
$\underline{15x - 6y = -9}$
$19x = 19$
$x = 1$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[1; 4]$.

Příklad 5.

Řešte v R^2 soustavu rovnic: $3x - 2y = -1$
$5x + 3y = 30$

Řešení.

Řešíme metodou srovnávací, tj. z každé rovnice vyjádříme proměnnou *x*:

$$3x - 2y = -1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{3}$$

$$5x + 3y = 30 \Rightarrow x = \frac{30-3y}{5}$$

$$\frac{2y-1}{3} = \frac{30-3y}{5} \qquad /.15$$

$5(2y - 1) = 3(30 - 3y)$
$10y - 5 = 90 - 9y$
$19y = 95$
$y = 5$

$x = \frac{2y-1}{3}$
$x = \frac{2 \cdot 5-1}{3}$
$x = 3$

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[3;\ 5]$.

3.3 LINEÁRNÍ NEROVNICE

Pod pojmem nerovnice rozumíme zápis nerovnosti dvou výrazů, v nichž se vyskytuje neznámá. Nerovnice se tedy liší od rovnice znaky nerovnosti $\leq, \geq, <, >$.

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentní úpravy:
- výměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice,
- nahrazení strany nerovnice výrazem, který je jí v celém oboru řešení nerovnice roven,
- přičtení téhož výrazu nebo reálného čísla k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran nerovnice týmž reálným číslem různým od nuly.

Lineární nerovnice se může vyskytovat ve tvaru $ax + b \geq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b < 0$, kde $a, b \in R$.

POZOR! Násobíme-li obě strany nerovnice stejným kladným číslem, znak nerovnosti se nezmění. Jiná situace ovšem nastává, násobíme-li obě strany nerovnice stejným záporným číslem, pak se znak nerovnosti obrátí.

Příklad 6.

V množině R řešte nerovnici:

$$\frac{37-2x}{2} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x$$

Řešení.

$$\frac{37-2x}{2} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x \qquad /.4$$

$$2(37 - 2x) + 36 \leq 3x - 8 - 4x$$
$$74 - 4x + 36 \leq -x - 8$$
$$3x \geq 118$$
$$x \geq \frac{118}{3}$$

Množina všech řešení lineárních nerovnice je K = $\langle\frac{118}{3}; \infty)$.

Příklad 7.

V množině R řešte nerovnici:

$$\frac{5x-6}{x+6} < 1$$

Řešení.

$$\frac{5x-6}{x+6} < 1$$

Nerovnici je nutné převést do anulovaného tvaru, kdy na pravé straně nerovnice bude číslo 0. Pak je třeba na levé straně nerovnice stanovit společný jmenovatel a nerovnici upravit.

$$\frac{5x-6}{x+6} - 1 < 0$$

$$\frac{5x-6-(x+6)}{x+6} < 0$$

$$\frac{4x-12}{x+6} < 0$$

Po ekvivalentních úpravách nerovnice postupujeme metodou nulových bodů. Zjistíme, kdy se čitatel a jmenovatel rovná nule. Tyto nulové body rozdělí množinu reálných čísel na intervaly. Ve vymezených intervalech budeme pomocí dosazování libovolného čísla z intervalu zjišťovat kladnou či zápornou hodnotu čitatele, jmenovatele a výsledného podílu.

Nulové body: $4x - 12 = 0$, $x = 3$; $x + 6 = 0$, $x = -6$

	$(-\infty; -6)$	$(-6; 3)$	$(3; \infty)$
$4x-12$	–	–	+
$x+6$	–	+	+
$\frac{4x-12}{x+6}$	+	–	+

Dle posledního řádku v tabulce zjistíme, který interval vyhovuje nerovnici. V našem případě se jedná o prostřední interval, kde se nachází znaménko mínus, neboť výraz má být záporný. Nulové body do množiny všech řešení dle zadání nerovnice $\frac{4x-12}{x+6} < 0$ nepatří, tj. kořenem je $K = (-6;\ 3)$.

3.4 Soustavy lineárních nerovnic

Soustavu lineárních nerovnic řešíme analogicky jako samotnou nerovnici. Každou nerovnici soustavy vyřešíme zvlášť. Množinou všech řešení soustavy nerovnic je průnikem řešení jednotlivých nerovnic soustavy.

Příklad 8.

Řešte soustavu nerovnic:

$$\frac{1-2x}{3} < \frac{1+3x}{4}$$

$$1-7x \geq -6x$$

Řešení.

$$\frac{1-2x}{3} < \frac{1+3x}{4} \qquad /.12$$

$$\begin{aligned} 4(1-2x) &< 3(1+3x) \\ 4-8x &< 3+9x \\ -17x &< -1 \\ x &> \frac{1}{17} \end{aligned}$$

$$K_1 = \left(\frac{1}{17}; +\infty\right)$$

$$\begin{aligned} 1-7x &\geq -6x \\ -x &\geq -1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

$$K_2 = (-\infty; 1\rangle$$

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty; 1\rangle \cap \left(\frac{1}{17}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{17}; 1\right\rangle$$

3.1 KVADRATICKÁ ROVNICE

Kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0, pro\ a \neq 0.$ Čísla a, b, c nazýváme koeficienty kvadratické rovnice:

ax^2	kvadratický člen
bx	lineární člen
c	absolutní člen

Řešením této rovnice je $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pro $D \geq 0$.

Výraz $D = b^2 - 4ac$ označujeme pojmem diskriminant:

$D > 0$	rovnice má dva různé reálné kořeny,
$D = 0$	rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen,
$D < 0$	rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení, (řešení existuje v oboru komplexních čísel).

Hodnota diskriminantu *D* rozhoduje o počtu řešení kvadratické rovnice.

Kvadratickou rovnici lze zapsat rovněž jako součin kořenových činitelů:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$

Příklad 9.

V oboru reálných čísel *R* řešte rovnici:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$$

Řešení.

$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3 \qquad /\cdot x(x+2) \qquad x \neq 0, x \neq -2$

$x \cdot x + (x+2)(x+2) = 3x(x+2)$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x$

$2x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x$

$-x^2 - 2x + 4 = 0 \qquad /\cdot(-1)$

$\underline{x^2 + 2x - 4 = 0}$

$D = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$

$D = 4 + 16$

$D = 20$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2-\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$$

$K = \{-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\}$

Příklad 10.

V oboru reálných čísel *R* rozložte kvadratické rovnice na součin kořenových činitelů:

a) $x^2 + x - 12 = 0$
b) $x^2 - 7x + 12 = 0$
c) $x^2 - 8x - 9 = 0$
d) $x^2 + 8x - 20 = 0$
e) $x^2 + 12x + 20 = 0$
f) $x^2 - 25 = 0$
g) $x^2 - 4x = 0$

Řešení.

a) $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) = 0$
b) $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$
c) $x^2 - 8x - 9 = (x+1)(x-9) = 0$
d) $x^2 + 8x - 20 = (x+10)(x-2) = 0$
e) $x^2 + 12x + 20 = (x+10)(x+2) = 0$
f) $x^2 - 25 = (x-5)(x+5) = 0$
g) $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$

3.5 KVADRATICKÉ NEROVNICE

Kvadratická nerovnice má jeden z následujících tvarů:
$ax^2 + bc + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, pro\ a \neq 0.$

Postup při řešení kvadratické nerovnice spočívá v metodě nulových bodů, které rozdělí číselnou osu na intervaly. V těchto intervalech zjišťujeme pomocí dosazení libovolného čísla z daného intervalu hodnotu kladnou nebo zápornou.

Kvadratické nerovnice lze řešit rovněž pomocí grafického znázornění kvadratické funkce, kdy zjišťujeme, která část funkce leží nad osou x $(ax^2 + bx + c > 0)$ popř. pod osou x $(ax^2 + bx + c < 0)$.

Příklad 11.

V množině reálných čísel řešte nerovnici:
$x^2 - 6x + 8 \geq 0$

Řešení.
$x^2 - 6x + 8 \geq 0$
$(x-2)(x-4) \geq 0$

Nulové body:

$x - 2 = 0$	$x - 4 = 0$
$x = 2$	$x = 4$

	$(-\infty;\ 2)$	$(2; 4)$	$(4; \infty)$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Hledané intervaly vyhovující dané nerovnice jsou oba krajní intervaly. Vzhledem ke skutečnosti, že se nerovnice $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ může rovnat nule, patří do množiny všech řešení nerovnice rovněž vymezené nulové body 2 a 4, tj. K = (-∞; 2⟩ ∪ ⟨4; ∞).

3.6 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Exponenciální rovnice obsahují neznámou x v exponentu mocnin.

Při řešení exponenciálních rovnic využíváme následujících vztahů (platí pro všechna $a, b \in R^+ - \{1\}$):

a) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$,
b) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log a = g(x)\log b$.

Příklad 12.

Řešte v R nerovnici $$2^{x+4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}\cdot 16^{x-2}\,.$$

Řešení.

Obě strany rovnice postupně upravujeme tak, aby byly vyjádřeny ve tvaru mocnin o stejném základu.

$$2^{x+4}\cdot 2^{-2(2x-3)}=2^{-3\cdot(-2)}\cdot 2^{4(x-2)}$$

$$2^{x+4-4x+6}=2^{6+4x-8}$$

$$2^{-3x+10}=2^{4x-2}$$

$$-3x+10=4x-2$$
$$-7x=-12$$
$$x=\frac{12}{7}$$

Příklad 13.

Řešte v R nerovnici $$\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3}\cdot\left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}.$$

Řešení.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2(x+3)}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3(4x-1)}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+6-12x+3}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-10x+9}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

$$-10x+9=-1$$
$$10x=10$$
$$x=1$$

3.7 LOGARITMUS ČÍSLA, LOGARITMICKÁ ROVNICE

Logaritmus kladného čísla x při základu z ($z\in R^{+}-\{1\}$) je exponent y, kterým musíme umocnit daný základ z, abychom dostali dané číslo x:

$$\log_z x=y \quad\Leftrightarrow\quad z^{y}=x$$

Např.: $\log_2 16 = 4$, protože $2^4 = 16$

$\log_{0,5} 8 = -3$, protože $(0,5)^{-3} = 8$

Pro každé $z \in R^+ - \{1\}$ platí: 1) $\log_z z = 1$, 2) $\log_z 1 = 0$.

Pro každé $a, b, z \in R^+ \wedge z \neq 1$ platí: 1) $\log_z ab = \log_z a + \log_z b$,

2) $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$ „

3) $\log_z a^r = r \cdot \log_z a$, $r \in R$.

Poznámka. 1) dekadický logaritmus $\log_{10} x$, označujeme jako $\log x$,

2) přirozený logaritmus $\log_e x$ označujeme jako $\ln x$ (e - Eulerovo číslo).

Příklad 14.

Vypočtěte neznámou z následujících rovnic:

a) $\log_2 x = 3$, b) $\log_4 x = -1$, c) $\ln x = 0$, d) $\log_4 16 = y$,

e) $\log_3 \frac{1}{27} = y$, f) $\log 1000 = y$, g) $\log_z 25 = 2$, h) $\log_z 7 = 4$.

Řešení.

a) $\log_2 x = 3$, $2^3 = x \Rightarrow x = 8$,

b) $\log_4 x = -1$, $4^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$,

c) $\ln x = 0$, $e^0 = x \Rightarrow x = 1$,

d) $\log_4 16 = y$, $4^y = 16 \Rightarrow 4^y = 4^2 \Rightarrow y = 2$,

e) $\log_3 \frac{1}{27} = y$, $3^y = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^y = 3^{-3} \Rightarrow y = -3$,

f) $\log 1000 = y$, $10^y = 1000 \Rightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$,

g) $\log_z 25 = 2$, $z^2 = 25 \Rightarrow z = 5$,

h) $\log_z 7 = 4$, $z^4 = 7 \Rightarrow z = \sqrt[4]{7}$.

Příklad 15.

Řešte v R rovnici $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x-1) = -1$.

Řešení.

Definiční obor rovnice: $x > 0 \wedge x - 1 > 0$,

$$x > 0 \quad \wedge \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad D = (1, \infty).$$

Levou stranu rovnice upravíme použitím pravidla o součtu logaritmů a pravou stranu vyjádříme pomocí logaritmu.

$$\log_{0,5} x(x-1) = -1 \cdot \log_{0,5} 0{,}5$$
$$\log_{0,5} x(x-1) = \log_{0,5} (0{,}5)^{-1}$$
$$\log_{0,5} (x^2 - x) = \log_{0,5} 2$$

$$x^2 - x = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Řešením rovnice je $x_2 = 2$, protože druhý kořen neleží v definičním oboru rovnice.

Příklad 16.

Řešte v R rovnici $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$.

Řešení.

Definiční obor rovnice: $x + 2 > 0 \wedge x - 1 > 0$,

$$x > -2 \wedge x > 1 \Rightarrow D = (1, \infty).$$

Levou stranu rovnice upravíme použitím pravidla o rozdílu logaritmů a pravou stranu vyjádříme pomocí logaritmu.

$$\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$$
$$\log \frac{x+2}{x-1} = \log 100 - \log 4$$
$$\log \frac{x+2}{x-1} = \log \frac{100}{4}$$
$$\frac{x+2}{x-1} = 25$$
$$x + 2 = 25(x-1)$$
$$x + 2 = 25x - 25$$
$$-24x = -27$$
$$x = \frac{27}{24}$$
$$x = \frac{9}{8}$$

4 REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

4.1 VLASTNOSTI REÁLNÝCH FUNKCÍ; DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE

Reálná funkce f jedné reálné proměnné (dále jen funkce) je množina všech uspořádaných dvojic $[x,\ y] \in R \times R$, pro které platí: pro každé $x \in R$ existuje nejvýše jedno $y \in R$ tak, že $[x,\ y] \in f$.

Definiční obor funkce f (označujeme $D(f)$), je množina všech $x \in R$, pro která existuje právě jedno $y \in R$ takové, že $[x,\ y] \in f$.

Obor hodnot funkce f (označujeme $H(f)$), je množina všech $y \in R$, pro která existuje alespoň jedno $x \in R$ takové, že $[x,\ y] \in f$.

Monotónní funkce zahrnují funkce rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající. Jsou to takové funkce, které splňují pro každou dvojici čísel $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in M \subset D(f))$ následující podmínky:

$$\text{Jestliže} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2), \\ f(x_1) > f(x_2), \\ f(x_1) \le f(x_2), \\ f(x_1) \ge f(x_2), \end{array} \right\} \quad \text{pak funkce } f \text{ je v } M \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí,} \\ \text{klesající,} \\ \text{neklesající,} \\ \text{nerostoucí.} \end{array} \right.$$

Funkce klesající a rostoucí nazýváme **ryze monotónní**.

Funkce f je na $D(f)$ **prostá**, jestliže každým dvěma hodnotám $x_1, x_2 \in D(f)$, kde $x_1 \ne x_2$, přiřazuje hodnoty $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Je-li funkce f prostá v množině $D(f)$, pak funkce, která přiřazuje každému $y \in H(f)$ hodnotu $x \in D(f)$ tak, že platí $y = f(x)$, se nazývá **funkcí inverzní** k funkci f (označujeme f^{-1}). Platí, že $D(f) = H(f^{-1}) \wedge H(f) = D(f^{-1})$. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle osy I. a III. kvadrantu.

Příklad 1.

Určete definiční obor funkcí:

a) $f_1: \ y = \dfrac{2x+1}{2x^2 - x - 3}$, b) $f_2: \ y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}}$, c) $f_3: \ y = \log\left(9 - x^2\right)$.

Řešení.

a) Protože jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, platí $2x^2 - x - 3 \neq 0$.

Kořeny kvadratické rovnice $2x^2 - x - 3 = 0$ jsou $x_1 = -1, \ x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Tzn., že $x \neq -1, \ \dfrac{3}{2}$. $D(f_1) = R - \left\{-1, \dfrac{3}{2}\right\}$

b) Vzhledem k tomu, že druhá odmocnina je definována v R pouze pro nezáporná čísla, budou platit následující podmínky:

$$\frac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 4 \neq 0 .$$

Řešíme nerovnici v podílovém tvaru metodou nulových bodů.

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq \pm 2$$

$$D(f_2) = (-2, 1\rangle \cup (2, \infty)$$

c) Protože logaritmická funkce je definována pouze pro kladný argument, platí:

$$9 - x^2 > 0$$
$$(3-x)(3+x) > 0$$

$$D(f_3) = (-3, 3)$$

4.2 LINEÁRNÍ FUNKCE

Lineární funkce je každá funkce daná předpisem $y = ax + b$, kde $a, b \in R \wedge a \neq 0$. Jejím grafem je přímka.

Platí: a) $D(f) = H(f) = R$,

b) $a > 0 \ \Rightarrow$ lineární funkce je rostoucí,
$a < 0 \ \Rightarrow$ lineární funkce je klesající,

c) lineární funkce je vždy prostá.

Je-li $a = 0$, pak funkce $y = b$ se označuje jako **funkce konstantní**. Grafem takovéto funkce je přímka rovnoběžná s osou *x*.

Příklad 2.

Určete lineární funkci *f*, jestliže její graf prochází body $[1,-1]$ a $[-2,5]$. Vypočtěte průsečíky grafu dané funkce se souřadnicovými osami. Zjistěte, zda na grafu funkce leží body $\mathrm{A}[3,-4]$, $\mathrm{B}\left[-\frac{3}{2},4\right]$.

Řešení.

Lineární funkce má rovnici $y = ax + b$. K určení neznámých koeficientů a, b využijeme dvou zadaných bodů, které leží na grafu funkce a jejich souřadnice musí vyhovovat rovnici lineární funkce.

$$\begin{array}{rrl} & \underline{y = \quad} & \underline{ax + b} \\ [1,-1]: & -1 = & a + b \\ [-2,5]: & 5 = & -2a + b \end{array}$$

Řešením vzniklé soustavy dvou rovnic o dvou neznámých je $a = -2, b = 1$. Hledaná funkce má tedy rovnici $y = -2x + 1$.

Průsečíky grafu funkce přímky se souřadnicovými osami:

a) průsečík s osou *x* má $y = 0$, tzn. že hledaný bod je $\mathrm{X}[x,0]$: $0 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$,

b) průsečík s osou *y* má $x = 0$, tzn. že hledaný bod je $\mathrm{Y}[0,y]$: $y = -2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$.

Průsečíky se souřadnicovými osami jsou $\mathrm{X}\left[\frac{1}{2},0\right]$, $\mathrm{Y}[0,1]$.

Mají-li body A, B ležet na grafu určené funkce, musí jejich souřadnice vyhovovat rovnici této funkce.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{y = -2x + 1} & \\
A[3,-4]: & -4 = -2 \cdot 3 + 1 & \\
 & -4 \neq -5 & \Rightarrow A \notin f \\
 & & \\
B\left[-\dfrac{3}{2},4\right]: & 4 = -2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 1 & \\
 & 4 = 4 & \Rightarrow B \in f
\end{array}
$$

Funkce má rovnici $y = -2x + 1$. Její průsečíky se souřadnicovými osami jsou $\left[\frac{1}{2},0\right]$, $[0,1]$.
Ze zadaných bodů leží na grafu funkce pouze bod B.

Příklad 3.

Napište rovnici lineární funkce $y = ax + b$, která prochází body $P = [-1, 7]$ a $Q = [2, -5]$.

Řešení.

Dosadíme oba body do rovnice $y = ax + b$:

$P = [-1, 7]$ $\qquad 7 = -a + b$

$Q = [2, -5]$ $\qquad -5 = 2a + b$

Řešením soustavy dostáváme $a = -4, \quad b = 3$. Rovnice lineární funkce je $y = -4x + 3$.

4.3 KVADRATICKÁ FUNKCE

Kvadratická funkce je každá funkce daná rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, kde $a,b,c \in R \wedge a \neq 0$. Grafem této funkce je parabola.

Platí: a) $D(f) = R$,

b) $a > 0 \Rightarrow$ ve vrcholu paraboly je minimum funkce, funkce je omezená zdola,
$a < 0 \Rightarrow$ ve vrcholu paraboly je maximum funkce, funkce je omezená shora,

c) kvadratická funkce není prostá.

Příklad 4.

Vypočtěte průsečíky s osami kvadratické funkce $y = x^2 + 3x - 28$.

Řešení.

Průsečíky s osami $P_x = [...,0]$; $P_y = [0,...]$ dostaneme řešením rovnic:

$$0 = x^2 + 3x - 28$$
$$0 = (x-4)(x+7)$$
$$x_1 = 4; \quad x_2 = -7$$

$$y = 0^2 + 3.0 - 28$$
$$y = -28$$

$P_x = [4,\, 0]$; $P_x = [-7, 0]$ $P_y = [0, -28]$

Příklad 5.

Určete kvadratickou funkci, o níž víte, že $f(2) = -5, \quad f(6) = -5, \quad f(4) = -9$.

Řešení.

Hledané koeficienty kvadratické rovnice dostaneme řešením soustavy rovnic:

$$\underline{y = ax^2 + bx + c}$$

$$\left.\begin{array}{ll} [2,-5]: & -5 = 4a + 2b + c \\ [6,-5]: & -5 = 36a + 6b + c \\ [4,-9]: & -9 = 16a + 4b + c \end{array}\right\} \text{ Řešením této soustavy je } a = 1,\ b = -8,\ c = 7\,.$$

Hledaná kvadratická funkce má rovnici $y = x^2 - 8x + 7$.

4.4 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Exponenciální funkce je každá funkce daná rovnicí $y = a^x$, kde $a \in R^+ - \{1\}$. Grafem je exponenciální křivka, která vždy prochází bodem $[0,1]$.

Platí: a) $D(f) = R,\ H(f) = R^+$,

b) $a > 1 \Rightarrow$ funkce je rostoucí,
$0 < a < 1 \Rightarrow$ funkce je klesající,

c) exponenciální funkce je vždy prostá.

V matematice je velmi důležitá exponenciální funkce $y = e^x$, kde e je Eulerovo číslo $\left(e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, $e \doteq 2{,}72$.

Příklad 6.

Určete, pro která reálná čísla b je funkce $y = \left(\frac{2b-3}{b+1} \right)^x$ rostoucí.

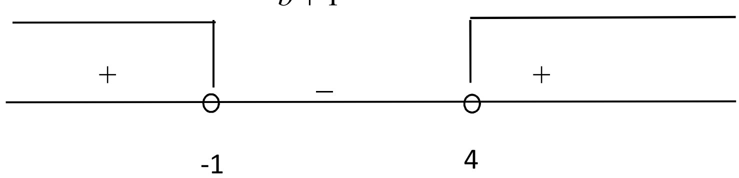
Řešení.

Daná funkce je funkcí exponenciální, kde $a = \frac{2b-3}{b+1}$, $b \neq -1$.

Exponenciální funkce je rostoucí, jestliže $a > 1$, tzn. že $\frac{2b-3}{b+1} > 1$.
Řešíme vzniklou nerovnici (převedeme ji nejdříve do anulovaného tvaru a pak do podílového tvaru, dále pokračujeme metodou nulových bodů).

$$\frac{2b-3}{b+1} - 1 > 0$$

$$\frac{b-4}{b+1} > 0$$



Funkce je rostoucí, jestliže $b \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

Příklad 7.

Je dána exponenciální funkce $y = 2^{x+1}$. Vypočtěte průsečíky s osami a hodnotu funkce v bodě $x = -2$.

Řešení.

Průsečíky s osami $P_x = [...,0]$; $P_y = [0,...]$ dostaneme řešením rovnic:

$0 = 2^{x+1}$

Rovnice nemá řešení, tzn. průsečík s osou x neexistuje.

$y = 2^{0+1} \quad \Rightarrow \quad y = 2$, $P_y = [0, 2]$.

$y(-2) = 2^{-2+1} \quad \Rightarrow \quad y(-2) = \frac{1}{2}$.

4.5 LOGARITMICKÁ FUNKCE

Logaritmická funkce je každá funkce daná předpisem $y = \log_z x$, kde $z \in R^+ - \{1\}$. Grafem je logaritmická křivka, která vždy prochází bodem $[1;0]$.

Platí: a) $D(f) = R^+$, $H(f) = R$,

b) $z > 1 \Rightarrow$ funkce je rostoucí,

$0 < z < 1 \Rightarrow$ funkce je klesající,

c) logaritmická funkce je vždy prostá.

Poznámka. Logaritmická funkce $y = \log_a x$ je funkcí inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$. Jejich grafy jsou souměrné dle osy I. a III. kvadrantu (přímka $y = x$).

Příklad 8.

Určete definiční obor funkce $y = \log \dfrac{x-1}{x^2 - 6x + 10}$.

Řešení.

Definičním oborem každé logaritmické funkce jsou pouze kladná čísla, a proto platí, že

$$\frac{x-1}{x^2 - 6x + 10} > 0 .$$

Trojčlen $x^2 - 6x + 10$ je v R nerozložitelný (diskriminant je záporný), hodnota tohoto výrazu je vždy kladná, tj. $x^2 - 6x + 10 > 0$. Takže čitatel musí být také kladný. Řešíme tedy nerovnici

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

$D(f) = (1, \infty)$.

Příklad 9.

Určete, pro které reálné hodnoty parametru a je funkce $y = \log_{\frac{a^2+1}{a^2-1}} x$ rostoucí.

Řešení.

Logaritmická funkce je rostoucí, je-li její základ z větší než 1.

$$\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} > 1$$

Nerovnici anulujeme a převedeme do podílového tvaru.

$$\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} - 1 > 0$$

$$\frac{2}{a^2 - 1} > 0$$

Číslo 2 je kladné $\Rightarrow$ $a^2 - 1 > 0$. Rozložíme a řešíme metodou nulových bodů.

$$(a-1)(a+1) > 0$$

$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

5 POSLOUPNOSTI A ŘADY

5.1 POJEM POSLOUPNOSTI, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI POSLOUPNOSTI

Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel. Její n-tý člen je funkční hodnota funkce přiřazená přirozenému číslu n, (označujeme a_n), tedy $a_n = f(n)$. Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[\, n, a_n]$.

Zápis posloupnosti: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V tomto případě se jedná o posloupnost nekonečnou. Je-li definiční obor posloupnosti omezen, tj. $D = \{1, 2, \ldots, n_0\}$, jedná se o posloupnost konečnou, značíme $\{a_n\}_{n=1}^{n_0}$, kde $n_0 \in N$.

Protože posloupnost je zvláštním případem funkcí, může být stejně jako funkce

$$\left.\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{konstantní}\end{array}\right\} \text{právě tehdy, jestliže pro každé } n \in N \text{ platí } \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1},\\ a_n > a_{n+1},\\ a_n \geq a_{n+1},\\ a_n \leq a_{n+1},\\ a_n = a_{n+1}.\end{array}\right.$$

Zadání posloupnosti: 1) výčtem (jsou-li konečné),
2) graficky,
3) předpisem: a) vzorcem pro n-tý člen,
b) rekurentně.

Příklad 1.

a) Napište prvních pět členů posloupnosti $\left\{\dfrac{3n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Vypočtěte a_{100}.

b) Napište prvních pět členů posloupnosti $a_n = (-2)^n$.

c) Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem

$$a_{n+2} = \frac{2a_n + a_{n+1}}{2},\ a_1 = -2,\ a_2 = 2.$$

Řešení.

a)

$$n=1 \Rightarrow a_1=\frac{4}{3}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{7}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3=2$$

$$n=4 \Rightarrow a_4=\frac{13}{6}$$

$$n=5 \Rightarrow a_5=\frac{16}{7}$$

$$n=100 \Rightarrow a_{100}=\frac{301}{102}$$

b) $a_1=-2;\quad a_2=4;\quad a_3=-8;\quad a_4=16;\quad a_5=-32$.

c)

$$a_1=-2$$

$$a_2=2$$

$$a_3=\frac{2a_1+a_2}{2}=\frac{-4+2}{2}=-1$$

$$a_4=\frac{2a_2+a_3}{2}=\frac{4+(-1)}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_5=\frac{2a_3+a_4}{2}=\frac{-2+\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$$

5.2 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Posloupnost se nazývá aritmetická právě tehdy, existuje-li takové reálné číslo d tak, že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. V aritmetické posloupnosti je rozdíl $(a_{n+1}-a_n)$ každých dvou sousedních členů konstantní. Tuto konstantu d označujeme jako diferenci aritmetické posloupnosti.

Je-li
a) $d > 0$, je aritmetická posloupnost rostoucí,
b) $d < 0$, je aritmetická posloupnost klesající,
c) $d = 0$, je aritmetická posloupnost konstantní.

Základní vztahy platící v aritmetické posloupnosti:

1) $a_n=a_1+(n-1)d$,

2) $a_r=a_s+(r-s)d$, kde $r > s$,

3) $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \quad n \neq 1$,

4) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, kde s_n je součet prvních n členů aritmetické posloupnosti.

Vztah 3) vyjadřuje, že v aritmetické posloupnosti je každý člen (mimo prvního) aritmetickým průměrem členů sousedních, proto se této posloupnosti říká aritmetická.

Příklad 2.

V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 4$, $d = -2$. Určete a_{12}, s_{12}.

Řešení.

Dosadíme $n = 12$ do vztahu $a_n = a_1 + (n-1)d$ a dostáváme: $a_{12} = a_1 + 11d$.

Dosadíme $a_1 = 4$, $d = -2$: $\quad a_{12} = 4 + 11\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad a_{12} = -18$.

Dosadíme do vztahu pro součet $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$:

$$s_{12} = \frac{12}{2}(4-18) \quad \Rightarrow \quad s_{12} = -84.$$

Příklad 3.

Určete a_1, d v aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a_2 + 3a_4 = 14$$
$$2a_4 - 4a_1 = 26.$$

Řešení.

Dosadíme $a_2 = a_1 + 1d$; $\quad a_4 = a_1 + 3d$ a řešíme soustavu:

$$a_1 + d + 3(a_1 + 3d) = 14$$
$$2(a_1 + 3d) - 4a_1 = 26.$$

Řešením soustavy je $a_1 = -4$; $\quad d = 3$.

Příklad 4.

Určete počet všech trojciferných čísel dělitelných sedmi.

Řešení.

První trojciferné číslo dělitelné sedmi je 105, poslední trojciferné číslo dělitelné sedmi je 994.

Označíme: $\quad a_1 = 105$, $a_n = 994$, $d = 7$, $n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d,$$
$$994 = 105 + (n-1)\,7 \quad \Rightarrow \quad n = 128.$$

Trojciferných čísel dělitelných sedmi je 128.

5.3 Geometrická posloupnost

Posloupnost se nazývá geometrická právě tehdy, existuje-li takové reálné číslo q tak, že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n q$. Platí tedy, že v geometrické posloupnosti je podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ každých dvou sousedních členů konstantní. Tuto konstantu q označujeme jako kvocient geometrické posloupnosti.

Základní vztahy, které platí pro geometrickou posloupnost:

1) $a_n = a_1 q^{n-1}$,

2) $a_r = a_s q^{r-s}$, kde r > s,

3) $|a_n| = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, $n \neq 1$,

4) $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ pro q ≠ 1,

$s_n = n.a_1$, pro $q = 1$, kde s_n je součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

Vztah 3) vyjadřuje, že v každé geometrické posloupnosti je absolutní hodnota každého členu (s výjimkou prvního) geometrickým průměrem sousedních členů, proto se této posloupnosti říká geometrická.

Grafem geometrické posloupnosti, pro jejíž kvocient platí, že $q \in R^+ - \{1\}$,je množina (izolovaných) bodů, které leží na exponenciální křivce, neboť vzorec pro n-tý člen $a_n = a_1 q^{n-1}$ je **exponenciální funkcí** proměnné $n \in N$.

Příklad 5.

Je dána geometrická posloupnost $a_1 = 4, \quad q = 2$. Vypočtěte a_5, s_5.

Řešení.

Dosadíme $n = 5$, $a_1 = 4, \quad q = 2$ do vztahu $a_n = a_1 q^{n-1}$: $a_5 = 4.2^4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 64$.

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad s_5 = 4 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \quad \Rightarrow \quad s_5 = 124.$$

Příklad 6.

V geometrické posloupnosti je $a_4 = -\dfrac{8}{3}, a_6 = -\dfrac{32}{3}$. Určete a_1, q, a_{10}, s_{10}.

Řešení.

Dle vztahu 2) platí : $a_6 = a_4 q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = \dfrac{a_6}{a_4}$,

$$q^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad |q| = 2.$$

Úloha má dvě řešení $q = 2 \;\vee\; q = -2$.

A) Pro $q = 2$:

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{-\frac{8}{3}}{2^3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{3},$$

$$a_{10} = a_1 q^9 \quad \Rightarrow \quad a_{10} = -\frac{1}{3}.2^9 = -\frac{512}{3}.$$

$$s_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad s_{10} = -\frac{1}{3}.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1},$$

$$s_{10} = -341.$$

B) Pro $q = -2$: $\quad a_1 = \dfrac{a_4}{q^3} \Rightarrow a_1 = \dfrac{-\frac{8}{3}}{(-2)^3} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{3},$

$$a_{10} = a_1 q^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{3}.(-2)^9 = -\frac{512}{3}.$$

$$s_{10} = \frac{1}{3}.\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} \Rightarrow s_{10} = -\frac{341}{3}.$$

Příklad 7.

V geometrické posloupnosti platí: $a_1 + a_4 = 112,$
$a_2 + a_3 = 48.$

Určeme tuto posloupnost (tj. určete a_1, q).

Řešení.

Do daných dvou rovnic dosadíme vztah 1): $\quad a_1 + a_1q^3 = 112,$
$a_1q + a_1q^2 = 48.$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou řešíme.

$$a_1(1 + q^3) = 112$$
$$a_1q\,(1 + q) = 48$$

Rovnice navzájem vydělíme a vzniklé zlomky krátíme.

$$\frac{a_1(1+q^3)}{a_1q(1+q)} = \frac{112}{48}$$

$$\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1q(1+q)} = \frac{112}{48}$$

$$\frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{3}$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$q_1 = 3,\ q_2 = \frac{1}{3}$$

Úloha má dvě řešení: A) $q = 3 \Rightarrow a_1 = 4$, B) $q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 108$.

5.4 Nekonečná geometrická řada

Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se nazývá nekonečná řada.

Je-li dána posloupnost geometrická, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,pak příslušná řada

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

se nazývá nekonečná geometrická řada.
Nekonečnou geometrickou řadu lze sečíst právě tehdy, jestliže je $|q| < 1$. Říkáme, že daná řada je konvergentní. Její součet je $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.
V opačném případě, tj . $|q| \geq 1$ řada nemá součet, říkáme, že je divergentní.

Příklad 8.
Zjistěte, zda následující řady jsou konvergentní. V kladném případě určete součet řady.

a) $1 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{16} - \dfrac{27}{64} + \dfrac{81}{256} - \ldots,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

Řešení.
a) Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = -\dfrac{3}{4}$, který splňuje podmínku konvergence, tj. náleží do intervalu (-1, 1). Danou řadu lze sečíst podle vzorce $s = \dfrac{a_1}{1-q}$, kde $a_1 = 1$, $q = -\dfrac{3}{4}$:

$$s = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4}{7}.$$

Řada je konvergentní, její součet $s = \dfrac{4}{7}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \ldots$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu, kde $q = \dfrac{4}{3} \notin (-1, 1)$. Podmínka konvergence není splněna. Řada je divergentní (nemá součet).

6 KOMBINATORIKA

6.1 FAKTORIÁL

Je-li n přirozené číslo, pak součin $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)...2.1$ se nazývá n-faktoriál a značí se $n!$. Dále platí, že $0! = 1$. To znamená, že $n!$ je definován pro všechna $n \in N \cup \{0\}$, tuto množinu označujeme jako N_0.

Příklad 1.

Upravte: a) $\dfrac{33!10!}{12!30!}$, b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Řešení.

a) $$\frac{33!10!}{12!30!} = \frac{33.32.31.30!10!}{12.11.10!30!} = \frac{33.32.31}{12.11} = 8.31 = 248$$

b) Daný výraz je definován pro všechna přirozená čísla, která splňují následující podmínky:

$$n+1 \geq 0 \quad \wedge \quad n-1 \geq 0$$
$$n \geq -1 \quad \wedge \quad n \geq 1$$

Výraz postupně upravujeme

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n^2 + n.$$

Příklad 2.

Řešte v N rovnici $\dfrac{2(n-1)!}{(n-3)!} - n = 8$.

Řešení.

Definiční obor rovnice: $n - 1 \geq 0 \ \wedge \ n - 3 \geq 0$,
$n \geq 1 \ \wedge \ n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad n \geq 3$.

V rovnici odstraníme faktoriály, algebraickými úpravami rovnici zjednodušíme na kvadratickou rovnici:

$$\frac{2(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} - n = 8$$
$$2(n-1)(n-2) - n - 8 = 0$$
$$2n^2 - 7n - 4 = 0$$
$$2(n-4)\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$n_1 = 4; \quad n_2 = -\frac{1}{2}$$

Definičnímu oboru rovnice vyhovuje řešení $n = 4$.

6.2 VARIACE A PERMUTACE

Jsou-li k, n přirozená čísla $(k \le n)$ a M je n-prvková množina, pak variace k-té třídy z n-prvků je každá uspořádána k-tice $[a_1, a_2, \dots, a_k]$, jejíž složky jsou navzájem různé prvky množiny M.
Počet variací k-té třídy z n prvků (bez opakování) je

$$V_k(n) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{\text{k činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zvláštním případem je situace pro $k = n$, tedy, tvoříme-li z daných n rozdílných prvků různé uspořádané n-tice. V tomto případě hovoříme o permutacích z n prvků. Počet permutací z n prvků (bez opakování) je

$$P(n) = V_n(n) = n(n-1)\dots 1 = n!$$

Příklad 3.

Kolik existuje trojciferných a čtyřciferných čísel s navzájem různými ciframi, jež lze napsat užitím cifer: a) 1, 2, 3, 4; b) 0, 1, 2, 3.

Řešení.
a) Každé trojciferné číslo vytvořené z číslic 1, 2, 3, 4 je vlastně uspořádaná trojice vytvořená z daných čtyř cifer (tj. záleží na pořadí prvků), jedná se tedy o variace třetí třídy ze 4 prvků. Jejich počet je $\mathrm{V}_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
Analogicky každé čtyřciferné číslo vytvořené z číslic 1, 2, 3, 4 je uspořádaná čtveřice vytvořená ze 4 prvků. Jsou to tedy variace čtvrté třídy ze 4 prvků, tj. permutace ze 4 prvků. Těch je $\mathrm{V}_4(4) = \mathrm{P}(4) = 4! = 24$.
Trojciferných a čtyřciferných čísel s navzájem různými ciframi vytvořených z čísel 1, 2, 3, 4 je celkem 48.

b) Opět tvoříme uspořádané trojice ze 4 prvků, kterých je $\mathrm{V}_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Jejich počet však musíme snížit o všechny uspořádané trojice začínající číslicí 0 (jednalo by se totiž o dvojciferné číslo), těch je $\mathrm{V}_2(3) = 3 \cdot 2 = 6$. Cifra 0 je totiž již pevně vázaná na prvním místě ve trojici, a proto uvažujeme již jen uspořádané dvojice, které jsou vytvořeny ze zbylých tří cifer. Trojciferných čísel vytvořených z číslic 0, 1, 2, 3 je tedy $\mathrm{V}_3(4) - \mathrm{V}_2(3) = 24 - 6 = 18$.
Počet čtyřciferných čísel vypočteme podobně:

$$\mathrm{V}_4(4) - \mathrm{V}_3(3) = \mathrm{P}(4) - \mathrm{P}(3) = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$$

Trojciferných a čtyřciferných čísel s navzájem různými ciframi vytvořených z číslic 0, 1, 2, 3 je celkem 36.

Příklad 4.

Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací vytvořených z těchto prvků dvacetkrát. Určete původní počet prvků.

Řešení.

Původní počet prvků je n, tzn., že počet permutací je $\mathrm{P}(n) = n!$. Bude-li prvků o dva méně, bude permutací $\mathrm{P}(n-2) = (n-2)!$.

Odtud lze pak sestavit rovnici o neznámé n, kterou řešíme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n-2) &= \frac{\mathrm{P}(n)}{20} \qquad , n \geq 2 \\
(n-2)! &= \frac{n!}{20} \\
20(n-2)! &= n! \\
20(n-2)! &= n(n-1)(n-2)! \\
20 &= n(n-1) \\
n^2 - n - 20 &= 0 \\
n_1 &= 5 \\
n_2 &= -4
\end{aligned}$$

Množina měla 5 prvků.

6.3 Kombinační číslo

Nechť $k,\ n \in N_0,\ k \leq n$. Pak číslo $\binom{n}{k}$ nazýváme kombinační číslo.

Platí: 1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$,

2) $\binom{n}{0} = 1,\quad \binom{0}{0} = 1,\quad \binom{n}{1} = n,\quad \binom{n}{n} = 1$,

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

4) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Příklad 5.

Vypočtěte: $\binom{9}{3} + \binom{9}{6} + \binom{8}{1} + \binom{8}{8} + \binom{8}{0}$.

Řešení.

$$\binom{9}{3}=\frac{9!}{(9-3)!3!}=\frac{9.8.7.6!}{6!.3.2.1}=84\,,\qquad \binom{9}{6}=\binom{9}{3}=84$$

$$\binom{9}{3}+\binom{9}{6}+\binom{8}{1}+\binom{8}{8}+\binom{8}{0}=84+84+8+1+1=178\,.$$

Příklad 6.

Řešte v N rovnici: $\binom{7}{1}\binom{n+2}{n}-\binom{5}{3}\binom{n+1}{n-1}=10\binom{n}{0}$.

Řešení.

Definiční obor rovnice $n \geq 1$.

Vypočteme kombinační čísla: $\binom{7}{1}=7$,

$$\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=\frac{5.4}{2!}=10\,.$$

Dále zjednodušíme kombinační čísla s neznámou dle vztahu 3):

$$\binom{n+2}{n}=\frac{(n+2)!}{2!.n!}=\frac{(n+2)(n+1)n!}{2.n!}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\binom{n+1}{n-1}=\frac{(n+1).n.(n-1)!}{2!.(n-1)!}=\frac{(\mathrm{n}+1)n}{2}$$

$$\binom{n}{0}=1$$

Dosadíme do rovnice:

$$7\frac{(n^2+3n+2)}{2}-10\frac{(n^2+n)}{2}=10 \qquad /.2$$

$$7n^2+21n+14-10n^2-10n=20$$

$$3n^2-11n+6=0$$

$$n_1=3,\; n_2=\frac{2}{3}$$

Definičnímu oboru rovnice vyhovuje pouze kořen $n = 3$.

6.4 KOMBINACE

Řešme nyní následující problém. Mějme 4-prvkovou množinu $M=\{a,b,c,d\}$. Vytvořme z této množiny všechny její tříprvkové podmnožiny. Kolik jich je?

Velmi snadno určíme počet těchto podmnožin jejich výčtem:

$$M_1=\{a,b,c\}, M_2=\{a,b,d\}, M_3=\{a,c,d\}, M_4=\{b,c,d\}\,.$$

Hledané podmnožiny jsou tedy čtyři. Důležité je, že v nich nezáleží na pořadí prvků. Hovoříme o tzv. kombinacích třetí třídy ze 4 prvků.
Obecně lze říci, že kombinace k-té třídy z n prvků je každá k-prvková podmnožina dané n-prvkové množiny $M(k \leq n)$. Počet těchto kombinací je dán vztahem

$$C_k(n) = \binom{n}{k}.$$

Příklad 7.
Vypočtěte, kolika způsoby lze z pěti chlapců a osmi dívek vybrat pětičlennou skupinu, v níž jsou: a) právě tři chlapci, b) aspoň tři chlapci.

Řešení.
a) Máme-li vybrat z pěti chlapců tři, vytváříme vlastně tříprvkové podmnožiny z původní pěti prvkové množiny, kterých je $C_3(5) = \binom{5}{3}$. Skupinu doplníme ještě dvěma dívkami z osmi, počet možností je $C_2(8) = \binom{8}{2}$. Podle kombinatorického pravidla součinu vzniklá kombinační čísla vynásobíme.
Pětičlennou skupinu o třech chlapcích lze vytvořit $\binom{5}{3} \cdot \binom{8}{2} = 280$ způsoby.

b) Mají-li být ve skupině aspoň tři chlapci, mohou tam být buď právě tři, čtyři, anebo pět chlapců. Každou z těchto možností řešíme tak jako v případě předchozím a výsledky sečteme.

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{8}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{8}{1} + \binom{5}{5} \cdot \binom{8}{0} = 280 + 40 + 1 = 321$$

Pětičlennou skupinu, ve které jsou aspoň tři chlapci, lze vytvořit 321 způsoby.

7 ANALYTICKÁ GEOMETRIE

7.1 ANALYTICKÁ GEOMETRIE PŘÍMKY V ROVINĚ

1) Parametrické rovnice přímky

Je-li přímka p určena bodem $\mathrm{A}[a_1, a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\bar{s}(s_1, s_2)$,potom pro všechny body $\mathrm{X}[x, y]$, které na přímce leží, platí:

$$\underline{\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{A} + t.\bar{s}, \quad t \in R}$$
$$x = a_1 + t.s_1,$$
$$y = a_2 + t.s_2.$$

Tyto rovnice označujeme jako parametrické rovnice přímky, parametrem je reálné číslo t.
Je-li směrový vektor $\bar{s} = \overline{\mathrm{AB}}$, kde body $\mathrm{A}[a_1, a_2]$, $\mathrm{B}[b_1, b_2]$ náleží přímce p, pak lze pomocí parametru t vystihnout těmito rovnicemi polopřímku, úsečku apod.:

a) pro $t = 0$ dostaneme bod A,
b) pro $t = 1$ dostaneme bod B,
c) pro $t \in \langle 0,1 \rangle$ se jedná o analytické vyjádření úsečky AB,
d) pro $t \in \langle 0, \infty)$ se jedná o analytické vyjádření polopřímky $\mapsto \mathrm{AB}$,
e) pro $t \in (-\infty, 0\rangle$ se jedná o analytické vyjádření polopřímky opačné polopřímce $\mapsto \mathrm{AB}$.

2) Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky je $ax + by + c = 0$, kde $a, b \in R$ (alespoň jedno z nich je nenulové). Koeficienty a, b jsou souřadnice tzv. normálového vektoru $\bar{n}(a, b)$. Normálový vektor přímky je vektor kolmý k přímce p, tzn. je kolmý i k vektoru směrovému $\bar{s}$, který je v tomto případě $\bar{s}(b, -a)$.

3) Směrnicový tvar rovnice přímky

Směrnicový tvar rovnice přímky je $y = kx + q$, kde k se nazývá **směrnice přímky** a platí, že $k = tg\varphi$.
φ je **směrový úhel** přímky, což je úhel, který svírá přímka p s kladnou částí osy $x (0 \le \varphi < \pi)$

Příklad 1.

Přímka p je dána body $\mathrm{A}[-3,1]$, $\mathrm{B}[2,4]$.

a) Napište její parametrické rovnice, rovnici obecnou i směrnicovou.
b) Zjistěte, zda na této přímce leží bod $\mathrm{M}[1,3]$.
c) Zjistěte, zda bod $\mathrm{N}\left[-1, \frac{11}{5}\right]$ leží na úsečce AB.
d) Určete směrový úhel φ přímky p.

Řešení.

a) Směrový vektor přímky p je $\bar{s} = \overline{\mathrm{AB}} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = \mathrm{B} - \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \bar{s}(5,3)$.
Parametrické rovnice přímky : $\underline{\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{A} + t\bar{s}, \; t \in \mathrm{R}}$.

$$x = -3 + 5t,$$
$$y = \quad 1 + 3t.$$

Obecnou rovnici dostaneme vyloučením parametru t (první rovnici vynásobíme číslem 3, druhou číslem (-5) a obě rovnice sečteme.

$$\begin{array}{r} 3x = -9 + 15t \\ \underline{-5y = -5 - 15t} \end{array}$$
$$3x - 5y = -14 \quad \Rightarrow \quad 3x - 5y + 14 = 0$$

Obecnou rovnici můžeme získat i tak, že si vyjádříme normálový vektor $\bar{n}$ z vektoru směrového $\bar{s}$, $(\bar{n} \perp \bar{s})$: $\bar{s}(5,3) \quad \Rightarrow \quad \bar{n}(3,-5)$.
Normálový vektor pak dosadíme do obecné rovnice přímky: $3x - 5y + c = 0$.
Koeficient c vypočteme dosazením bodu A (nebo B) do takto získané rovnice:

$$\mathrm{A} \in p: \quad 3(-3) - 5.1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 14.$$

Obecná rovnice přímky je $3x - 5y + 14 = 0$.

Směrnicovou rovnici přímky získáme z obecné rovnice osamostatněním proměnné y:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

b) Má-li bod $\mathrm{M}[1,3]$ ležet na přímce p, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici této přímky. Proto souřadnice bodu M dosadíme do rovnice přímky (parametrické, obecné či směrnicové). Dosazením např. do obecné rovnice dostaneme: 3.1 - 5.3 + 14 = 0,

$$2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M} \notin p.$$

Bod M neleží na přímce p.

c) Máme-li zjistit, zda bod $\mathrm{N}\left[-1, \frac{11}{5}\right]$ leží na úsečce AB, musíme jeho souřadnice dosadit do parametrických rovnic této přímky a vyřešit z obou rovnic parametr t. Bude-li parametr $t \in \langle 0,1 \rangle$, což je podmínka pro úsečku AB, pak bod N této úsečce náleží:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -3 + 5t \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} = \quad 1 + 3t \;\Rightarrow\; t = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \quad \text{bod N je bodem úsečky AB.}$$

Bod N je bodem úsečky AB.

d) Směrový úhel φ přímky p zjistíme ze směrnicového tvaru přímky:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5} \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30°58'.$$

Směrový úhel přímky p je 30°58′.

Příklad 2.

Jsou dány body $\mathrm{R}[5,1]$, $\mathrm{S}[-2,3]$, $\mathrm{T}[2,-1]$. Napište rovnici procházející bodem T tak, aby byla

a) rovnoběžná s přímkou RS,

b) kolmá na přímku RS.

Řešení.

a) Označme hledanou přímku p. Protože přímka p je rovnoběžná s přímkou RS, mají stejné směrové vektory, tzn., že vektor $\overline{\mathrm{RS}}$ je současně i směrovým vektorem přímky p: $\overline{\mathrm{RS}} = \mathrm{S} - \mathrm{R} = (-7{,}2) = \bar{s}_p$.

Ze směrového vektoru určíme pak vektor normálový:

$$\bar{s}_p(-7{,}2) \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_p(2{,}7).$$

Obecná rovnice přímky p: $2x + 7y + c = 0$.

$$\mathrm{T} \in p: \ 2.2 + 7(-1) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Obecná rovnice přímky p je $2x + 7y + 3 = 0$.

b) Označme přímku kolmou na přímku RS a procházející bodem T jako q. Protože q je kolmá na přímku RS, musí být její normálový vektor roven směrovému vektoru přímky RS :

$q \perp \mathrm{RS} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_q = \overline{\mathrm{RS}} \quad \Rightarrow \bar{n}_q(-7{,}2)$.

Obecná rovnice přímky q : $-7x + 2y + c = 0$,

$$\mathrm{T} \in q: \ -7.2 + 2(-1) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 16.$$

Obecná rovnice přímky procházející bodem T a kolmé na přímku RS je $-7x + 2y + 16 = 0$.

Polohové vztahy přímek v rovině

Dvě přímky *p, q* v rovině mohou být totožné, rovnoběžné (různé) nebo různoběžné.

a) **Totožné přímky (*p*=*q*)** mají nekonečně mnoho společných bodů. Jejich normálové (resp. směrové) vektory jsou na sobě závislé, tj. $\bar{n}_p = k\bar{n}_q$ (resp. $\bar{s}_p = k\bar{s}_q$), $k \neq 0$.
b) **Rovnoběžné přímky (různé)** nemají žádný společný bod. Jejich normálové (resp. směrové) vektory jsou rovněž závislé.
c) **Různoběžné přímky** mají společný právě jeden bod, tzv. průsečík. Jejich normálové (resp.směrové) vektory jsou nezávislé.

Příklad 3.

Určete vzájemnou polohu přímek *p, q, r,* jestliže

$$p: x - y + 1 = 0,$$
$$q: y = 3x + 3,$$
$$r: x = 2 + t, \quad y = -3 + t, t \in \mathrm{R}.$$

Řešení.

Rovnice všech tří přímek vyjádříme v obecném tvaru.

$$p: x - y + 1 = 0$$
$$q: y = 3x + 3 \quad \Rightarrow \quad 3x - y + 3 = 0$$
$$r: \left.\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= -3 + t \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x - y - 5 = 0$$

Přímky *p, r* mají shodné normálové vektory $\bar{n}(1,-1)$, jejich obecné rovnice se liší pouze v absolutním členu, a proto jsou přímky *p, r* rovnoběžné.

Přímka q má normálový vektor $\bar{n}(3,-1)$. Tento je s normálovým vektorem přímek *p, r* různoběžný, takže i přímka q je s přímkami *p, r* různoběžná.

Určíme průsečík P_1 přímky p s přímkou q.

$$\begin{array}{rl} p: & x - y + 1 = 0 \\ q: & \underline{3x - y + 3 = 0} \\ & 2x + 2 = 0 \end{array}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1[-1,0]$$

Nyní vypočteme průsečík P_2 přímky r s přímkou q.

$$\begin{array}{rl} r: & x - y - 5 = 0 \\ q: & \underline{3x - y + 3 = 0} \\ & 2x + 8 = 0 \end{array}$$

$$x = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -9 \quad \Rightarrow \quad P_2[-4,-9]$$

Přímky p, r jsou rovnoběžné, přímka q je s nimi různoběžná. Příslušné průsečíky jsou $P_1[-1,0]$, $P_2[-4,-9]$.

7.2 KUŽELOSEČKY – KRUŽNICE

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost r (S je střed kružnice, r její poloměr).
Rovnice kružnice:

1) střed S je v počátku soustavy souřadnic, tj. $S[0,0]$: $x^2 + y^2 = r^2$.
2) střed S je v bodě $S[m,n]$: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, tzv. středová rovnice,
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, tzv. obecná rovnice.

Příklad 4.
Napište obecnou rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka AB, kde $A[2,1]$, $B[10,7]$.

Řešení.
Střed S hledané kružnice je středem dané úsečky AB, poloměr r kružnice je vzdálenost bodů S, A (resp. S, B):

$$S = \frac{A+B}{2} \quad \Rightarrow \quad S[6,4],$$

$$r = |SA| \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{(2-6)^2 + (1-4)^2} = 5.$$

Středová rovnice kružnice je $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$.
Odtud získáme algebraickou úpravou rovnici obecnou.
Obecná rovnice kružnice je $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$.

Příklad 5.
Určete vzdálenost bodu $M[-9,3]$ od středu kružnice

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$,
b) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 4y + 36 = 0$.

Řešení.

a) Obecnou rovnici kružnice převedeme do středového tvaru (tzv. doplnění na čtverec).

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$$
$$\left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) = 23 + 9 + 4$$
$$(x-3)^2 + \left(y+2\right)^2 = 36$$

Daná kružnice má střed $S[3,-2]$, poloměr $r = 6$.
Vzdálenost bodů M,S:

$$|MS| = \sqrt{(3+9)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{144+25} = 13\,.$$

Vzdálenost bodu M od středu kružnice k je 13.

b) Rovnici krátíme číslem 2 a pak obě proměnné x, y doplníme na čtverec.

$$2x^2 + 2y^2 - 16x + 4y + 36 = 0 \qquad /:2$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 18 = 0$$
$$\left(x^2 - 8x + 16\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) = -18 + 16 + 1$$
$$(x-4)^2 + \left(y+1\right)^2 = -1$$

Tato rovnice však nevyhovuje žádné uspořádané dvojici $[x,y]$, protože levá strana rovnice je vždy nezáporná, pravá záporná. Daná rovnice nebyla tedy rovnicí kružnice (ani žádné jiné křivky). Nelze stanovit vzdálenost bodu M od středu křivky, která neexistuje.

7.3 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KRUŽNICE

Přímka v rovině je
a) sečnou kružnice, má-li s ní dva společné body,
b) tečnou kružnice, má-li s ní jeden společný bod,
c) vnější přímkou kružnice, nemá-li s ní žádný společný bod.

Příklad 6.

Vypočtěte délku tětivy, kterou vytne přímka $x - y - 1 = 0$ na kružnici o středu $S[-3,-3]$ a poloměru $r = 5$.

Řešení.

Rovnice kružnice je $\left(x+3\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 25$.
Z rovnice přímky vyjádříme $y = x - 1$.
Řešíme soustavu rovnic dosazovací metodou:

$$(x+3)^2+(x-1+3)^2=25$$
$$(x+3)^2+(x+2)^2=25$$
$$x^2+6x+9+x^2+4x+4=25$$
$$2x^2+10x+13=25=$$
$$2x^2+10x-12=0$$
$$x^2+5x-6=0$$
$$(x-1)(x+6)=0$$

Řešením je $x_1=1;\quad x_2=-6$. Přímka je tedy sečnou kružnice. Dopočteme souřadnice $y_1=0;\quad y_2=-7$.

Délka tětivy, je pak rovna vzdálenosti bodu $P_1=[1,0]$ a bodu $P_2=[-6,-7]$.
$d=|P_1P_2|=\sqrt{(-6-1)^2+(-7-0)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=7.\sqrt{2}$

LITERATURA

1. Bušek, I. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií, SPN, Praha, 1991.
2. Cibulková,E., Kubešová,N.: MATEMATIKA – přehled středoškolského učiva, Petra Velanová, Třebíč, 2006.
3. Coufal, J. a kol.: Přijímací zkoušky z matematiky na VŠE v letech 1994 a 1995, VŠE, Praha, 1996.
4. Godulová,M., Janů,I.: Příklady k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky, OPF Karviná, 2002.
5. Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy, SPN, Praha, 1996.
6. Pešková, M. a kol.: Přehled středoškolského učiva, Matematika, ORFEUS, Praha, 1992.
7. Stoklasová, R.: Kvantitativní metody, OPF Karviná, 2013.